

Guillermou–Kashiwara–Schapira kernels of geodesic flows

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻

新井 匠 (Takumi ARAI) *

概要

Guillermou–Kashiwara–Schapira はハミルトニアニソトピーの層量子化が一意的に存在することを抽象的に構成することで証明した。本講演では、ハミルトニアニソトピーが球面上または複素射影空間上の geodesic flow で与えられる場合に、その層量子化を具体的に構成できることを説明する。

1 導入

全体を通して、 \mathbb{K} を単位的可換環とする。 M を微分可能多様体とする。 I を $0 \in \mathbb{R}$ を含む開区間とする。微分可能多様体 M に対して、 $\mathrm{Sh}(M)$ を \mathbb{K} 加群に値をとる M 上の層の導来圏とする。対象 $F \in \mathrm{Sh}(M)$ に対して、 T^*M の部分集合 $\mathrm{SS}(F)$ を F のマイクロサポートとする。

[NZ09] や [GPS24] でよく知られているように、シンプレクティック幾何と超局所層理論にはある種の関係がある。よい条件の下では、シンプレクティック幾何的な対象に対して、それに付随する超局所層理論的な対象を構成することができ、このことを「層量子化」ということがある。層量子化の代表的な例を二つ挙げる。シンプレクティック多様体 T^*M のラグランジュ部分多様体 L に対して、 $\mathrm{SS}(\hat{L}) \setminus M = L$ をみたす対象 $\hat{L} \in \mathrm{Sh}(M)$ のことをラグランジュ部分多様体 L の層量子化と呼んだりする。ハミルトニアニソトピー $\phi_t : T^*M \rightarrow T^*M$ に対して、 $\mathrm{SS}(\hat{\phi}_t(-)) = \phi_t(\mathrm{SS}(-))$ をみたす自己圏同値 $\hat{\phi}_t : \mathrm{Sh}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(M)$ のことをハミルトニアニソトピー ϕ_t の層量子化と呼んだりする。本稿では、この「ハミルトニアニソトピーの層量子化」に焦点をあてて解説する。

Guillermou–Kashiwara–Schapira は、ある条件の下でハミルトニアニソトピーの層量子化が一意的に存在することを示した。

定理 1.1 ([GKS12]). $\phi : (T^*M \setminus M) \times I \rightarrow T^*M \setminus M$ をハミルトニアニソトピーとする。各時刻 $t \in I$ で $\phi_t : T^*M \setminus M \rightarrow T^*M \setminus M$ は自然な $\mathbb{R}_{>0}$ 作用と可換であると仮定する。このとき、ある対象 $K_\phi \in \mathrm{Sh}(M \times M \times I)$ が存在して $\mathrm{SS}(K_\phi) \setminus (M \times M \times I) = \Lambda_\phi$ かつ $K_\phi|_{\{t=0\}} \cong \mathbb{K}_{\Delta_M}$ が成り立つ。ここで、 $\Lambda_\phi \subset T^*(M \times M \times I)$ とは ϕ の誘導するラグランジュ部分多様体である。さらに、 K_ϕ は同型を除いて一意的である。

同型を除いて一意的に定まる対象 K_ϕ は Guillermou–Kashiwara–Schapira kernel または GKS kernel と呼ばれる。 K_ϕ は上の条件をみたす自己圏同値 $\mathrm{Sh}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(M)$ を誘導するので、 K_ϕ も

* arai.takumi.74e@st.kyoto-u.ac.jp

また上の意味でハミルトニアンイソトピー ϕ の層量子化と呼ぶことができる。GKS kernel にはいろいろな応用があるので、超局所層理論において重要な対象である一方で、[GKS12]における GKS kernel の存在証明では GKS kernel を抽象的に構成しているために GKS kernel が具体的にどのような層になっているのかはよくわからないものであった。本稿では、リーマン多様体 (M, g) を (S^n, g_{std}) または $(\mathbb{C}P^n, g_{\text{FS}})$ とし、ハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*M \setminus M$ が geodesic flow (つまり、ハミルトニアン $H : T^*M \setminus M \rightarrow \mathbb{R}, H(x, \xi) = |\xi|_{g^*}$ の生成するハミルトンベクトル場の生成するフロー) で与えられる場合に、 K_ϕ の具体的な構成を与える。

2 準備

2.1 シンプレクティック幾何

(X, ω) をシンプレクティック多様体とする。 X 上の C^∞ 級関数 $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ のことをハミルトニアンという。ハミルトンベクトル場 $v \in \mathfrak{X}(X)$ とは、あるハミルトニアン H が存在して等式 $\omega(v, -) = dH$ が成り立つようなベクトル場のことである。ハミルトニアンイソトピー $\phi : X \times I \rightarrow X$ とは、ハミルトンベクトル場を積分することで得られるフローのことである。シンプレクティック幾何では、ハミルトニアンイソトピーは重要な概念であり、とくに、後で定義する geodesic flow というものが重要である。

例 2.1. 余接束 T^*M は標準的なシンプレクティック構造 $\omega = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i$ を持つ。ここで、 (x_1, \dots, x_n) は M の局所座標であり、 (ξ_1, \dots, ξ_n) は T^*M のファイバー座標である。

例 2.2. ハミルトニアン $H : T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, H(x, \xi) = |\xi|$ はハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n, \phi_t(x, \xi) = (x + t \frac{\xi}{|\xi|}, \xi)$ を生成する。

定義 2.3. (M, g) を完備リーマン多様体とする。 (M, g) 上の geodesic flow とは、 C^∞ 級写像 $\phi : (TM \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow TM \setminus M, \phi_t(x, v) = d_{\frac{v}{|v|}} \text{Exp}_{x,t}(v)$ のこと。ここで、 $\text{Exp}_{x,t} : T_x M \rightarrow M$ は点 $x \in M$ から時刻 $t \in \mathbb{R}$ だけ流す指数写像であり、 $d_{\frac{v}{|v|}} \text{Exp}_{x,t} : T_{\frac{v}{|v|}}(T_x M) \rightarrow T_{\text{Exp}_{x,t}(\frac{v}{|v|})} M$ はその微分である。また、リーマン計量 g から誘導される同一視 $TM \cong T^*M$ の下で、 geodesic flow $\phi : (TM \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow TM \setminus M$ に対応する C^∞ 級写像 $\tilde{\phi} : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*M \setminus M$ のことも geodesic flow と呼ぶことにする。

命題 2.4. (M, g) を完備リーマン多様体とする。 $\phi : (TM \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow TM \setminus M$ を (M, g) 上の geodesic flow とする。点 $(x, v) \in TM \setminus M$ を固定して、曲線 $\phi(x, v, -) : \mathbb{R} \rightarrow TM \setminus M$ を考える。このとき、 $\phi(x, v, -)$ の底空間成分は点 x から出発する v 方向の測地線であり、ファイバー成分はこの測地線に沿った v の平行移動である。

命題 2.5. (M, g) を完備リーマン多様体とする。このとき、 geodesic flow $\phi : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*M \setminus M$ はハミルトニアン $H : T^*M \setminus M \rightarrow \mathbb{R}, H(x, \xi) = |\xi|_{g^*}$ の生成するハミルトニアンイソトピーである。

2.2 超局所層理論

グロタンディークの六演算 (Grothendieck's six operations) を $f_*, f^{-1}, f_!, f^!, \otimes, \mathcal{H}om$ と書くことにする. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X , 局所閉部分集合 $Z \subset X$, 包含写像 $i: Z \rightarrow X$, 対象 $F \in \text{Sh}(X)$ に対して, $F_Z \in \text{Sh}(X)$ を $F_Z := i_! i^{-1} F$ で定義し, $\Gamma_Z(F) \in \text{Sh}(X)$ を $\Gamma_Z(F) := i_* i^! F$ で定義する. Z 上の \mathbb{K} に付随する定数層を $\mathbb{K}_Z \in \text{Sh}(Z)$ と書くことにする. 記号の濫用だが, $i_! \mathbb{K}_Z \in \text{Sh}(X)$ もまた \mathbb{K}_Z と書くことにする.

定義 2.6. $F \in \text{Sh}(M)$ に対して, F のマイクロサポート (microsupport) とは,

$$\overline{\{(x, \xi) \in T^*M \mid \exists f \in C^\infty(M), f(x) = 0, d_x f = \xi, (\Gamma_{\{x \in M \mid f(x) \geq 0\}} F)_x \neq 0\}}^{T^*M}$$

で定義される T^*M の閉部分集合のことである. F のマイクロサポートを $\text{SS}(F)$ と書く.

例 2.7. $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ を $0 \in \mathbb{R}$ を正則値にもつような C^∞ 級関数とする. $U := \{x \in M \mid \phi(x) < 0\}$, $Z := \{x \in M \mid \phi(x) \geq 0\}$ とおく. このとき, $\mathbb{K}_U, \mathbb{K}_Z \in \text{Sh}(M)$ について, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{SS}(\mathbb{K}_U) &= U \cup \{(x, \xi) \in T^*M \mid x \in \partial U, \xi = \lambda d_x \phi, \lambda > 0\}, \\ \text{SS}(\mathbb{K}_Z) &= Z \cup \{(x, \xi) \in T^*M \mid x \in \partial Z, \xi = \lambda d_x \phi, \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

例 2.8. $N \subset M$ を C^∞ 級部分多様体とする. このとき, $\mathbb{K}_N \in \text{Sh}(M)$ について, $\text{SS}(\mathbb{K}_N) = T_N^*M$ が成り立つ. ここで, T_N^*M とは, N の M における余法束である.

定義 2.9. $\phi: (T^*M \setminus M) \times I \rightarrow T^*M \setminus M$ をハミルトニアンイソトピーとする. 各時刻 $t \in I$ で $\phi_t: T^*M \setminus M \rightarrow T^*M \setminus M$ は自然な $\mathbb{R}_{>0}$ -作用と可換であるとする. ϕ の Guillermou–Kashiwara–Schapira kernel または GKS kernel とは, 対象 $K_\phi \in \text{Sh}(M)$ であって, 次の条件

$$\text{SS}(K_\phi) \setminus (M \times M \times I) = \Lambda_\phi \tag{1}$$

$$K_\phi|_{\{t=0\}} \cong \mathbb{K}_{\Delta_M} \tag{2}$$

をみたすもの. ここで, α を T^*M 上の 1 形式 $\alpha = \sum_i \xi_i dx_i$ とし, v_ϕ を ϕ の誘導する時間依存ベクトル場とし, $\langle -, - \rangle$ を 1 形式とベクトル場のペアリングとし, Λ_ϕ を $\Lambda_\phi = \{(\phi_t(x, \xi), (x, -\xi), (t, -\langle \alpha, v_\phi \rangle(\phi_t(x, \xi), t))) \in T^*M \times T^*M \times T^*I \mid (x, \xi) \in T^*M \setminus M, t \in I\}$ とし, Δ_M を $M \times M$ の対角線集合とする.

定理 2.10 ([GKS12]). GKS kernel は同型を除いて一意に存在する.

例 2.11. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の部分集合 Z_0, Z_1 を $Z_0 := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x - y| \leq -t\}$, $Z_1 := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x - y| < t\}$ で定義する. ハミルトニアンイソトピー $\phi: (T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$, $\phi_t(x, \xi) = (x + t \frac{\xi}{|\xi|}, \xi)$ の GKS kernel K_ϕ について, $K_\phi \cong \text{Cone}(\psi: \mathbb{K}_{Z_0}[-1] \rightarrow \mathbb{K}_{Z_1}[n])$ が成り立つ. ここで, ψ とは, $\text{Hom}_{\text{Sh}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}(\mathbb{K}_{Z_0}[-1], \mathbb{K}_{Z_1}[n]) \cong \mathbb{K}$ の生成元である.

3 主結果

いま、同型を除いて一意に存在する GKS kernel K_ϕ が具体的にはどのような層であるかというところに興味がある。主結果は以下である。

定理 3.1. リーマン多様体 (M, g) を (S^n, g_{std}) または $(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, g_{\text{FS}})$ とする。ハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \rightarrow T^*M \setminus M$ を (M, g) 上の geodesic flow とする。このとき、 $M \times M \times \mathbb{R}$ の部分集合の族 $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ と整数の族 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ と導来圏 $\text{Sh}(M \times M \times \mathbb{R})$ の射の列

$$\dots \xrightarrow{\psi_{-3}} \mathbb{K}_{Z_{-2}}[n_{-2}] \xrightarrow{\psi_{-2}} \mathbb{K}_{Z_{-1}}[n_{-1}] \xrightarrow{\psi_{-1}} \mathbb{K}_{Z_0}[n_0] \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{K}_{Z_1}[n_1] \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{K}_{Z_2}[n_2] \xrightarrow{\psi_2} \dots$$

が存在して、射 ψ_i の写像錐 (mapping cone) を順次とる^{*1}ことで得られる対象は GKS kernel K_ϕ に同型である。さらに、この Z_i と n_i と ψ_i は具体的に与えられる。

例 3.2. $(M, g) = (S^n, g_{\text{std}})$ の場合。

Z_i, n_i, ψ_i は次のようにとれる。

$$Z_i = \begin{cases} \{(x, y, t) \in S^n \times S^n \times \mathbb{R} \mid \text{dist}(x, y) \leq -t + i\pi\} & \text{if } i \leq 0 \\ \{(x, y, t) \in S^n \times S^n \times \mathbb{R} \mid \text{dist}(x, y) < t - (i-1)\pi\} & \text{if } i > 0 \end{cases}$$

$$n_i = \begin{cases} in & \text{if } i \leq 0 \\ in + 1 & \text{if } i > 0 \end{cases}$$

$\psi : \mathbb{K}_{Z_i}[n_i] \rightarrow \mathbb{K}_{Z_{i+1}}[n_{i+1}]$ は $\text{Hom}_{\text{Sh}(S^n \times S^n \times \mathbb{R})}(\mathbb{K}_{Z_i}[n_i], \mathbb{K}_{Z_{i+1}}[n_{i+1}]) \cong \mathbb{K}$ の生成元。

参考文献

- [GKS12] Stéphane Guillermou, Masaki Kashiwara, and Pierre Schapira. Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems. *Duke Math. J.*, 161(2):201–245, 2012.
- [GPS24] Sheel Ganatra, John Pardon, and Vivek Shende. Microlocal Morse theory of wrapped Fukaya categories. *Ann. of Math. (2)*, 199(3):943–1042, 2024.
- [NZ09] David Nadler and Eric Zaslow. Constructible sheaves and the Fukaya category. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(1):233–286, 2009.

^{*1} より正確に言えば、 $\psi_{-m}, \psi_{-m+1}, \dots, \psi_{m-1}, \psi_m$ の順に mapping cone をとることで得られる対象 K_m の $m \rightarrow \infty$ についてのホモトピー余極限を考える。